Chapitre II - Fonctionnement local : mécanismes et opérateurs

Séries et cycles

Il pourrait paraître anachronique d'en revenir, une fois délimités les formalismes qui permettent d'approcher, préalablement à toute structure fine, l'espace musical, aux opérateurs sériels classiques pour entamer la description de certains outils syntaxiques utiles.

D'autant plus qu'ils ont pu paraître, dans l'œuvre de Webern par exemple, auto-suffisants pour déterminer cet espace et même contradictoires avec toute autre pré-détermination. En effet, la notion d'ordre entre un ensemble fini d'objets sonores peut s'opposer au libre jeu de sous-ensembles de ces objets.

Mais cette contradiction n'est qu'apparente ; d'abord l'ensemble des objets traités par les opérateurs sériels n'est une totalité qu'à la congruence (modulo) près ; de plus, la projection verticale d'une section du discours détermine en général une sélection de fait, au contrôle local limité, et c'est l'arbitraire des relations globales d'espace qui a souligné la faiblesse et créé la crise du langage sériel.

Revenons-en aux fonctions réelles de la série :

- Assurer fonctionnellement une répartition statistique de sons échappant à l'ordre tonal

- Déduire cette répartition d'opérateurs aptes à organiser la totalité des sons audibles, à l'intérieur d'une échelle quantifiée, à partir d'un ordre de succession aussi réduit que possible

- Attacher à cet ordre de succession, et à ses transformations par les opérateurs précédemment définis une fonction structurelle.

La première condition, qui tend à utiliser le mécanisme sériel comme un «générateur de notes» pseudo-aléatoire, a été poussée à la limite par Jean Barraqué [5.13], qui définissait une chaîne de séries, à partir d'une série donnée considérée comme une permutation de degré 12, en appliquant l'ordre des termes de cette permutation sur elle-même autant de fois qu'il était possible, soit en retombant sur la permutation initiale (cycle), soit en arrivant sur la permutation 0 qui ne déplace aucun objet. On voit que ce mécanisme, qui met en jeu les propriétés les plus abstraites des groupes de permutation, s'il satisfait à la seconde condition, écarte résolument la troisième. De plus, un tel traitement, qui conduit à une prolifération organisée, relève typiquement du calcul par ordinateur.

La seconde condition, qui veut instituer un ordre d'objets dans une totalité, ne s'attachait au départ qu'aux objets eux-mêmes (notes) et non à leurs rapports (intervalles). L'organisation de la totalité des intervalles à l'intérieur d'une série, déjà entrevue par Hiller et Isaacson [6.1] fera l'objet d'un développement dans ce qui suit. Enfin, la troisième condition implique une analyse des symétries internes pouvant exister dans la série elle-même. On en donnera également quelques exemples.

Ce qui reste significatif à mon sens dans la démarche sérielle est la définition d'opérateurs abstraits [5.1] adaptés au traitement informatique, sur lesquels on reviendra.

L'ordinateur à la rescousse : calcul des cycles équilibrés.

On ne refera pas ici l'historique de la naissance de la série schoenbergienne. Le propre de la démarche était à mon sens, pour faire face à l'évanescence des hiérarchies tonales, de substituer une notion d'ordre appliquée à un ensemble de sons modulo-12, à la notion de sélection hiérarchisée caractéristique du monde tonal. Schoenberg lui-même avait baptisé sa méthode «composition avec douze sons qui n'ont d'autres parentés que celles de chaque son avec chaque autre»[1.14].

On relira utilement l'analyse des symétries internes des séries de Webern et du problème général de la structure interne d'une série tel que le conçoit Pierre Boulez [5.5]. On trouve entre autres dans ses réflexions l'observation d'une particularité de la série initiale de la *Suite Lyrique* d'Alban Berg, le fait qu'elle comporte tous les intervalles possibles, la seconde moitié de la série étant l'exact miroir de la première, transposé à la quinte diminuée.

Il serait inexact de dire que mes propres investigations dans ce sens sont parties de cette observation. Je recherchais plutôt à l'époque (1958-1960) une organisation plus radicale, qui pût donner un sens indiscutable à la volonté de Schoenberg (parentés de chaque son avec chaque autre). Pour ce faire, il fallait qu'une série ne fût pas caractérisée seulement par un ordre des éléments de l'ensemble, qui revient en fait à un ordre de la totalité des intervalles vis-à-vis d'une note de référence, mais également à un ordre continuement varié de la proximité entre ces sons, c'est-à-dire à une série d'intervalles. D'une part je fis l'exercice de la conception d'une œuvre basée sur une série d'intervalles qui n'utilisait qu'un sous-ensemble de $\mathbb{Z}_{12}$, et avait donc le caractère d'un mode. « *Dualités pour violon et piano* » (1962) est entièrement fondé sur cette ambiguïté. Une telle conception transitoire constituait l'exact complément de l'approche de Schoenberg (Série de hauteurs : totalité des éléments de $\mathbb{Z}_{12}$ n'employant en général qu'un sous-ensemble des intervalles de proximité. Série d'intervalles : totalité des intervalles modulo-12 n'employant qu'un sous-ensemble des éléments de $\mathbb{Z}_{12}$).

Le passage à la limite était dès lors tracé : trouver des séries qui soient à la fois des séries de hauteurs et d'intervalles. Je m 'employai donc à la recherche de telles séries, et m'aperçus alors que leur synthèse était malaisée. En effet, la double contrainte correspondante avait pour résultat que s'il était simple de commencer, l'exclusion progressive des hauteurs et intervalles restants aboutissait le plus souvent à une impossibilité, et il me fallait plusieurs heures pour en découvrir une, dont la structure interne ne me paraissait pas nécessairement satisfaisante. En effet, il s'agissait de tracer un graphe dans une vaste arborescence dont les trajets permis diminuaient à chaque étape. Mes contacts professionnels avec l'informatique (j'avais depuis 1961 la charge d'un laboratoire de calcul hybride au Centre Commun de Recherche Euraton, établissement d'Ispra, Italie) me fournirent une solution : l'écriture d'un programme Fortran par un programmeur analyste, A.Debroux, qui, sur mes indications, put calculer la totalité des séries ayant la double caractéristique. [6.2]

Je constatai par la même occasion qu'une série équilibrée était fermée par constitution, c'est-à-dire que le 12ème intervalle refermait le cycle sur la première note.

Définitions

Soit $\mathbb{Z}_{12}=(0,1....11)$ l'ensemble des 12 notes de l'octave tempérée.

$\mathbb{Z}_{12}$ forme un groupe par rapport à l'addition précédemment définie.

Envisageons toutes les manières de former une suite ordonnée de 12 éléments avec tout ou partie des éléments du groupe. Ce sera l'ensemble £ des arrangements de 12 objets 12 à 12 avec répétitions qui forme le groupe symétrique S (£) de cardinal 12^{12}

soit A_0 = < $a_0, a_1, \dots a_{11}$ > l'une de ces suites $a_k \in \mathbb{Z}_{12}$ k = 0,1, ... 11

et $d_i = a_{i+1} + a_i^{-1}$ la distance entre deux éléments successifs qu'on appellera intervalle.

On a réciproquement :

$$a_i = a_{i-1} + d_{i-1} = a_0 + \sum_{i-0}^{i-1} d_i$$

enfin $\delta_i = a_i + a_0^{-1} = \sum_{i-0}^{i-1} d_i$ représente l'intervalle entre l'élément i et l'élément 0 ou écart.

Si $a_0 = 0$, la suite des δ_i coïncide avec celle des a_i

Soit d'autre part

D_0 = < $d_{0,} d-1, \dots d-11$ > la suite ordonnée des intervalles de A_0

On supposera de plus que

$a_{i+1} \neq a_i$ quelque soit i (pas d'unisson entre deux notes successives).

Dans ce cas, les $d_i \in \Delta_{12}$ avec $\Delta_{12} = \{-6,-5,-4,\dots -1,1,\dots 6\}$

si A_0 est tel que $a_i \neq a_j$ quels que soient i et j on dit que A_0 est une série de hauteurs.

L'ensemble $E \in £$ des A_0 est formé de toutes les permutations des éléments de $\mathbb{Z}_{12}$, qui forme un groupe symétrique de cardinal $12! = 479.001.600$

Si la suite associée D_0 de A_0 est une permutation de Δ_{12} , on dit que A_0 est un cycle d'intervalles

Le cycle d'intervalles est fermé sur lui-même (le 12ème intervalle est la distance entre a_{11} et a_0)

Démonstration

on a $a_1 = a_0 + d_0$

$a_2 = a_1 + d_1$

....

$a_{12} = a_{11} + d_{11}$ a_{12} étant l'élément défini par

$a_{12}+\sum_{i=1}^{11} a_i = a_0 + \sum_{i=1}^{11} a_i + \sum_{i=0}^{11} d_i$

c'est-à-dire $a_{12}+a_0^{-1}=\sum_{i=0}^{11} d_i$

mais $\sum_{i=0}^{11} d_i \equiv 0$ (mod 12)

d'où $a_{12} \equiv a_0$ cqfd

soit E' l'ensemble des cycles d'intervalles. $E' \in \pounds$ l'intervalle 6 coïncidant avec son inverse, le groupe symétrique E' des cycles d'intervalles aura pour cardinal $\frac{12!}{2}$

l'intersection $L = E' \cap E \;\; L \subset \pounds$ représente l'ensemble des suites ordonnées A_0 qui ont la double propriété d'être des séries de hauteurs et des cycles d'intervalles. On dit que ces suites sont des <u>cycles équilibrés</u>. Par suite de $L \subset E'$, ils ont la propriété de fermeture précédemment démontrée.

Retour au traitement par ordinateur :

Le programme initial a fourni, après réduction à $a_0 = 0$ 1928 CE (cycles équilibrés) (ironie des nombres, le total des CE coïncidait avec l'année de ma naissance. Pour la petite histoire, Patrick Greussay m'a dit avoir réécrit le programme et recalculé les CE)

En fait, une version ultérieure du programme rédigée par moi, utilisait la propriété de fermeture, en excluant tous les cycles qui coïncident avec la récurrence, le renversement et la récurrence du renversement (au sens Schoenbergien) de cycles précédemment calculés, analysés en boucles fermées.

Une analyse accessoire du programme met en évidence ceux des cycles dont une forme déduite par les opérateurs ci-dessus et l'opérateur « déphasage » qui sera décrit plus loin coïncide avec le cycle lui-même (50 cycles).

Pour permettre un classement plus aisé du matériel obtenu, un programme successif a soumis tous les CE à une analyse par sous-ensembles de 3 à 8 notes, mettant en évidence

les accords majeurs et mineurs

les divers accords de septième

les suites de 5 à 7 notes appartenant à un ton majeur ou mineur (y compris les modes obtenus par renversement du mineur. Il est facile de constater que tous les autres accords ou modes analysés gardent leur propriétés par renversement)

les suites de 5 à 8 notes appartenant aux classes de résidus mod 12

les suites de 5 à 8 notes appartenant à l'un des modes à transpositions limitées les plus couramment utilisés par Olivier Messiaen. (M_2^k avec k = 1, 2, 3 voir ci-dessus).

Cette analyse a permis de découvrir :

38 CE coïncidant avec leur récurrence

6 CE doublement coïncidents

35 CE ne comprenant aucun accord classé

51 CE ne comprenant comme accord classé qu'une 7è diminuée

(classes de résidus 3_i) etc...

La série de la suite lyrique de Berg déjà citée y figurait parmi les CE symétriques auto-coïncidents.

J'ai conservé après ces divers filtrages 65 CE qui me paraissaient répondre le mieux aux critères structurels que je m'étais fixés.

On peut donc constater qu'il s'agit d'un matériau « rare » (formes finales : $70 x 12$ transpositions

Séries possibles : $12!$ d'où une probabilité de $\frac{70\times 12}{479\times 10^6}\approx 1,6\times 10^{-6}$) et, sans l'informatique, même en y dédiant ma vie, je n'aurais pas encore terminé aujourd'hui l'exploration.

Formalisation des opérateurs sur les CE

On utilisera aussi le couple $A_0 = (a_0, D_0)$ pour caractériser un CE

a_0 est le 1er terme ou origine.

Opérateur V (renversement)

$VA_0 = < v_0, v_1, \ldots v_{11} > = (a_0, VD_0)$

avec $v_k = a_0 - \sum_0^{k-i} d_i$ (on utilise la notation $m_i^{-1} = -m_i$)

$VD_0 = < -d_0, -d_1, \ldots, -d_{11} >$

Opérateur R (récurrence)

$RA_0 = < r_0, r_1, \ldots r_{11} > = (a_0, RD_0)$

avec $r_k = a_{(-k)}$

$RD_0 = < -d_{11}, -d_{10}, \ldots, -d_0 >$

Opérateur T (transposition)

$T^j_{A_0} = < t_0, t_1, \ldots t_{11} > = (a_0 + j, D_0)$

avec $t_k = a_k + j \quad j = 0,1,\ldots 11$

Opérateur Φ (transposition)

$\Phi A_0 = < \varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_{11} >$

avec $\varphi = a_{k+1}$

Quelques relations

soit I l'opérateur identité $IA_0 = A_0$

On a V.V = I

R.R = I

$T^i T^j = T^{(i+j)} \quad T^{12} = I$

$\Phi^i \Phi^m = \Phi^{(i+m)} \quad \Phi^{12} = I$

Composition des opérateurs

On a $R.V = V.R$

$V.T^J = T^J.V$

$R.T^j = T^j.R$

$V.\Phi^k = \Phi^{¿} k.V$

($\Phi^k_d.R = R.\Phi^{(-k)}_d \quad \Phi_d$ opérateur Φ appliqué à D_0)

$R.\Phi^j = \Phi^{(-j)}.R$

$T^r \Phi^j = \Phi^j.T^k$ démonstration en annexe.

Les opérateurs V, R et T commutent entre eux. Ils engendrent donc 4 sous-groupes :

$T^j A_0, T^j V A_0, T^j R A_0, T^j RVA_0 \quad j = 0,1,\ldots 11$

Soit en tout les 48 termes des opérations de Schoenberg.

Φ commute avec V et T ; il ne commute pas avec R mais la correspondance univoque $R\Phi^{j}=\Phi^{-j}R$ permet d'expliciter l'ensemble des termes engendrés dans chaque sous-groupe par les permutations cycliques Φ^{i}

Le terme général du vocabulaire V soit U^{x}, sera caractérisé par 4 indices :

U^{x} (i,j,α,β) = $\Phi^{i}T^{j}V^{\alpha}R^{\beta}A_0$ avec $\begin{matrix} i=0,1,...11 & \alpha=0,1 \\ j=0,1,....11 & \beta=0,1 \end{matrix}$

V comprendra donc en général 576 termes.

Cas particuliers

si dans D_0 on a $d_i=-d_{(i+6)}$ le mot A_0 est dit V-symétrique

si dans D_0 on a $d_i=-d_{(2-i+1)}$ le mot A_0 est dit R-symétrique

Dans les deux cas, les vocabulaires correspondants n'ont que 288 termes.

Structure interne d'une série ou d'un cycle

Pierre Boulez a précisé certaines propriétés contenues dans la structure même d'une série.

Barraqué avait également étudié les séries apparentées à la base de la Suite Lyrique d'Alban Berg, et détaillé l'analyse de l'Allegro Misterioso ainsi que celle des variations pour piano de Webern.

Toutefois, il n'est pas inutile de renouveler l'exercice, en l'appliquant à un CE, afin d'indiquer que la mise à jour de symétries, si elles existent, sont propres à un CE et qu'une telle analyse devra être faite sur chaque nouveau CE. Nous prendrons pour exemple le CE N°357 utilisé dans mon Quatuor à Cordes à solutions multiples « Perspectives ». Si nous prenons la précaution de mettre en évidence, avec leur orientation, les intervalles pairs et les intervalles impairs sur deux représentations circulaires modulo-12 distinctes, les symétries apparaissent clairement.

On observe d'abord que les intervalles impairs regroupent des demi-tons, les tierces mineures et les tritons (forme A) alors que les intervalles pairs regroupent les tons, les tierces majeures et les quartes (forme B). Ceci posé, et par extension avec les propriétés des groupes, on peut mettre en évidence des transformations privilégiées utilisant les opérateurs traditionnels T, R et V.

Sur la forme A

1°) Transpositions (rotations)

- une rotation de π (T^6 ou triton) conserve la disposition relative des intervalles impairs mais les rétrograde.

- une rotation de $\frac{\pi}{2}$ (T^3 ou tierce min) échange les intervalles l'intérieur d'un groupe de 4 sons

t (do - do#, sol - fa#) R (do - fa #, do #- sol)

R (la - mi *b*, si *b* - mi) t (mi *b* - mi, si *b* - la)

m (fa - ré, la *b* - si) m (la *b* - fa, si – ré)

une rotation de $\frac{3\pi}{2}$ (T^9 ou sixte maj) opère un échange semblable :

t (do - do#, sol - fa#) R (fa # - do , sol - do #)

R (la - mi *b*, si *b* - mi) t (mi – mi *b*, la - si *b*)

m (fa - ré, la *b* - si) m (fa - la *b*, ré – si)

2°) Renversements (symétries par rapport à des diamètres)

- une symétrie par rapport au diamètre $\frac{\pi}{12}$ ne modifie pas les tierces mineures, rétrograde les autres.

- Une symétrie par rapport du diamètre $\frac{7\pi}{12}$ rétrograde les tierces mineures, ne modifie pas les autres.

Sur la forme B :

1°) Renversements

Une symétrie par rapport au diamètre $\frac{5\pi}{12}$ ne modifie aucun intervalle pair.

En résumé, on aura trois types de transformations privilégiées

Les rotations de k_1 ($\frac{\pi}{2}$ + $\frac{\lambda\pi}{12}$), k_1 = 0,1,2,3 (3 familles)

Les symétries par rapport à k_2 ($\frac{\pi}{12}$ + $\frac{\lambda\pi}{2}$) (6 familles)

Les symétries par rapport à ($\frac{5\pi}{12}$ + $\frac{\lambda\pi}{12}$) (12 familles)

Les deux premières opèrent des échanges d'intervalles sur les mêmes couples de notes.

La troisième garde stables les intervalles pairs.

On peut ainsi construire des réseaux sur des sous-ensembles des formes possibles, apparentés par des relations étroites entre des familles d'intervalles.

Formes apparentées

Il existe des CE différents dont certains sous-ensembles restent identiques. Une autre possibilité plus large consiste, à partir d'un CE donné, à rechercher les séries de hauteurs et les séries d'intervalles les plus proches, par échanges successifs d'intervalles symétriques dans le CE (t ($t \rightleftarrows$, $\bar{t}$ $T \rightleftarrows$, $\bar{T}$, etc). J'ai décrit à l'époque un sous-programme au programme principal calculant et classant les CE, qui fournit automatiquement ces familles.

Modes généraux d'enchaînement des séries et cycles

Là encore, Boulez a fourni des indications [5.5] sur les types d'enchaînements qu'il utilise pour ses propres oeuvres.

J'ai défini, en utilisant les propriétés des CE, des opérateurs jonction qui permettent la constitution de chaînes de longueurs différentes, l'exploration des chaînes possibles pour un CE pouvant être automatisée et permettant leurs regroupements en sous-ensembles. (un logiciel spécialisé MANUCYCLES a été mis au point depuis par M. Mesnage qui calcule tous les sous-ensembles possibles répondant à un mode d'enchaînement (concaténation) pré-établi).

On utilise pour ce faire une généralisation de l'usage des opérateurs classiques (R,V, R-V) sur des chaînes déjà constituées.

Opérations « Jonction » ou concaténation avec coïncidence

Pour construire des chaînes de termes, on définit des opérateurs de jonction.

- 1- Jonction faible : soient deux termes B_0 et C_0

  La jonction se fait par $c_0=b_{11}$ (coïncidence de notes)

- 2- Jonction du premier ordre : soient deux termes B_0 = (b_0,D_0) et C_0 = (c_0,G_0)

  La jonction se fait par les coïncidences d'intervalles c'est-à-dire $g_0=d_{11}$

- 3- Jonction du deuxième ordre

  avec les mêmes notations $g_0 = d_{10}$

Si les jonctions du 1er et 2ème ordre se font alternativement entre éléments de deux sous-groupes, les chaînes résultantes ont une forme univoque et sont fermées.

Les algorithmes en musique

Si les nécessités du traitement informatique ont rendu familiers les mécanismes d'auto-génération de symboles connus sous le nom d'algorithmes (on rappelle que le mot algorithme a une racine commune avec le mot algèbre, et que sa définition par le Conseil Consultatif du langage scientifique est la suivante : « système de symboles et de règles opératoires relatives à ces symboles ») mécanismes formalisés par la théorie des automates finis, la notion même qu'il décrit a été présente de tous temps en musique, à commencer par sa forme triviale, la répétition.

Tous les élèves de classes d'écriture connaissent la marche d'harmonie, modulante ou non, dont nous ne donnerons que pour mémoire trois exemples, tirés pour la facilité de la littérature du clavier.

a- marche non modulante tirée de la 9ème des 25 sonates pour clavecin de Domenico Scarlatti : établie sur un parcours descendant de la gamme de la mineur sous sa forme mélodique, elle préfigure déjà les suites d'accords parallèles de Debussy.

b- marche non modulante tirée du Rondo de la Sonate pour piano op 2 N03 en ut majeur de Beethoven.

c- marche modulante tirée du Rondo de la sonate pour piano op 28 en ré majeur de Beethoven.

Ce sont des translations ascendantes ou descendantes de motifs construits sur des relations harmoniques simples établissant le pas élémentaire qui peut être reproduit ensuite de manière automatique, le cas échéant avec ré-initialisation (sauts de 10ème tous les 4 groupes de l'ensemble b), en vue d'un parcours significatif en soi.

Ce parcours, s'il est suffisamment long (exemples a et b) est facilement mémorisé et donc prévisible par le récepteur, qui est alors sensibilisé soit à ses changements d'orientation soit à son aboutissement.

Remarquons une différence importante entre les deux types de marches :

la marche modulante respecte exactement les rapports du motif initial dans ses translations ; ses proportions « géométriques » sont fixes et la marche est une suite d'applications du motif dans $\mathbb{Z}_{12}$.

> La marche non-modulante en revanche met en jeu une opération « arithmétique », en ce sens que le motif de base n'est pas constitué par les intervalles eux-mêmes mais par le nombre d'éléments qu'il parcourt.

L'exemple b en effet est construit sur l' « idée de motif » (conception chère à Jean Barraqué) tierce montante, c'est-à-dire, dans la notation du chapitre sur les échelles, une suite d'applications du motif (i, i+2) dans le sous-ensemble P_3^M (gamme de mi *b* majeur) de $\mathbb{Z}_{12}$.

Remarquons d'ailleurs que l'exemple b est une forme de compromis entre les deux types de mécanismes, car l'autre constituant du motif, celui qui précède la tierce, est un demi-ton ascendant quelle que soit l'appartenance de la note du départ ; les translations de celle-ci appartiendront donc non à P_3^M mais à $\mathbb{Z}_{12}$. Les exemples de mécanismes de ce type abondent, en particulier dans les partitions de J.S. Bach, au point que l'on pourrait parler d'un style « déterministe par morceaux » dans de nombreuses sections de son oeuvre.

On cherchera plutôt ici à illustrer une série de mécanismes du même ordre rencontrés dans l'écriture d'Olivier Messiaen qui en fait un usage courant.

Une pièce quasi totalement algorithmique : «*l'Echange*»

tiré des *20 regards sur l'Enfant-Jésus* pour Piano d'Olivier Messiaen. A part les 7 dernières mesures, toute la pièce peut être décrite à partir d'un bloc d'une durée de 11 croches (2 mesures de la partition) constitué de 4 groupes distincts. Ces 4 groupes ont des dates d'occurrence, des durées et un nombre de constituants fixes à l'intérieur de la période. C'est donc un cas simple de fonctionnement en boucle unique.

Le 1er groupe, formé de 2 sous-groupes de densité 2 et 3 est totalement répétitif (hauteurs, articulations), seule l'intensité étant continuellement croissante.

Les 3 autres groupes fonctionnent sur des algorithmes identiques

$n_{i+1}=n_i,\ n_{i+1}=n_i+1,\ n_{i+1}=n_i-1$ (i numéro d'ordre du passage de la boucle)

appliqués a des éléments isolés ou à des successions d'éléments.

Une formalisation plus détaillée est inutile pour saisir le principe. On remarque simplement la limite retenue par Messiaen (12 incréments), évitant une reprise des rapports harmoniques à l'octave près.

De même, les dernières mesures, qui fonctionnent d'abord par

> - tronçonnement de la boucle (réduite à 4 croches par élimination des 7 dernières) et anticipation du groupe G_2 d'une unité (mes.25 à 27) et 3 répétitions ;
>
> - nouveau tronçonnement par élimination cette fois des deux premières (mes.28) et 3 répétitions conduisent au silence, au-delà duquel une brusque dilatation du temps rompt la boucle, et conclut par une fixation hors algorithme.

On retrouve le même algorithme sous une forme typique en boucle de période 5 croches dans une section de la pièce X (p.62-63 de la partition) ; la boucle fonctionne sur 13 périodes.

Même processus dans la strette de la Fugue (Regard VI p 35.38 de la partition) en canon à 3 voix ; boucle encore sur 12 périodes, suivie d'une variante à deux voix réelles, l'une des voix (la basse) étant identique à l'octave près à la voix-pilote de l'exemple précédent ré-initialisée (période 15 double-croches), l'autre le sujet en mouvement contraire avec allongement par répétition de note (période 23 double-croches).

Même algorithme enfin dans le Regard XX, en boucle de 11 croches, présente dans 3 sections (main gauche) avec ré-initialisation toutes les 4 périodes et augmentation de densité (2 notes en octave, 3 notes) puis de nombre d'événements (croche, croche, puis double croche en battements).

Cet algorithme est en contrepoint avec un motif de 12 sons en valeurs égales répété 2 fois et de position fixe dans la période. Ce motif n'a que 4 formes différentes, qui sont reprises à chaque ré-initialisation de l'algorithme. Or il n'apparaît pas d'algorithme évident entre ces 4 formes.

Un exercice d'extrapolation en algorithmes

C'est donc à lui que nous allons nous intéresser, en cherchant à répondre à la question : existe-t-il un algorithme plus général dont ces 4 formes ne seraient qu'un sous-ensemble ?

Je ne prétends pas que ce soit la démarche suivie par Messiaen ; je suis persuadé du contraire ; mais il est instructif, étant donné le nombre restreint de libertés qu'il s'est laissé, de résoudre ce problème en vue d'une application plus large des mécanismes algorithmiques.

Observons donc les 4 groupes en question ; les hauteurs du total chromatique étant en position invariable, on peut les représenter numériquement modulo-12 (b). Pour les 5 premières notes, le mécanisme est évident. Dans les 7 suivantes, une seule régularité est équivalente ($si \rightarrow 11$). Cependant, on observe entre les groupes 1 et 2 l'usage pour ces 7 notes de l'opérateur déphasage Φ (permutation cyclique des n termes d'une position à gauche) à la puissance 3. On remarque au passage que ce même opérateur à la puissance 2 peut décrire le déplacement des termes 2 à 4. On imaginera donc une séquence algorithmique en <u>rameau</u>, c'est-à-dire qu'on passera d'un groupe impair au suivant par application d'un algorithme à définir, alors que les groupes pairs seront déduits du groupe impair précédent par applications de 2 opérateurs locaux.

Soit *A* une séquence de n termes.

On appellera <u>déphasage local</u>, noté $\Phi_1(k, l; A)$ la permutation cyclique des *l* termes de *A*, commençant par le *k*ième, d'un terme à gauche $(k+1-1)$.

En particulier, une permutation de deux termes voisins sera notée $\Phi_e(k, 2;A)$

Appelons *A(12)* le 1er groupe

On passera du 1er au second par application des opérateurs

$\Phi_e^2(2{,}3\,;A)$ et $\Phi_e^4(6{,}7\,;A)$

Cherchons maintenant l'algorithme de passage du 1er au 3ème groupe. Il nous est suggéré par la succession invariante 560 ; on appliquera alors :

$$A'_0=\Phi_e(7{,}6\,;A_1)$$

$$A''_0=\Phi_e(10{,}3\,;A'_1)$$

$$A_3=\Phi_e(9{,}2\,;A''_1)$$

Quant au groupe 4, d'après notre hypothèse d'enchaînement en rameau, il est déduit d'une forme de groupe type impair par les opérations a ; cherchons cette forme : on en déduit le groupe.

Reste à passer du dernier groupe existant , A_3 à ce groupe x ;

On appliquera le même type d'opérateurs :

$$A'_3=\Phi_e^2(9{,}4\,;A_3)$$

$$A_x=\Phi_e(10{,}2\,;A'_3)$$

En définissant les algorithmes globaux

$A_{2i+2}=F(A_{2i+1})=\Phi_e^2(2{,}3\,;A_{2i+1})\oplus\Phi_e^4(6{,}7\,;A_{2i+1})$ (on ne peut faire une sommation d'opérateurs que dans la mesure où leurs zones d'actions sont disjointes)

$$A_{4i+3}=X(A_{4i+1})=\Phi_e\Big[9{,}2\Big[\Phi_e\big[10{,}3\big[\Phi(7{,}6;A_{4i+1})\big]\big]\Big]\Big]$$

$$A_{4i+3}=Y(A_{4i+1})=\Phi_e\Big[10{,}2\Big[\Phi_e^2(9{,}4;A_{4i+3})\Big]\Big]$$

on pourra définir la séquence de production des A_j à partir de A_1

La chaîne d'opérateurs $X\rightarrow Y$ donne 8 formes distinctes,on calculera donc les 16 A_i dont on trouvera la transcription musicale.

Quant à un algorithme de lecture qui respecte la séquence de départ $(A_1-A_2-A_3-A_6)$, on en trouvera une forme possible, qui analyse en 3 passages successifs les 16 A_i avec une répétition de chaque groupe ; sa longueur totale avant reprise est donc de 32 groupes alors que Messiaen en utilise 7 x 4 = 28. On pourrait en trouver d'autres, liés par exemple à l'évolution des algorithmes de la main gauche.

Cet exercice est utile pour situer le degré de répétitivité littérale que l'on tolère dans un langage de ce type. En effet, dans sa présentation, Messiaen répète déjà deux fois chaque groupe A_1-A_2 , A_2-A_2 , etc. soit 14 répétitions en tout.

Autres procédures de Messiaen fondées sur les durées.

Il les a analysées lui-même [5.2]

On citera pour mémoire :

- Le canon de durées sur hauteurs fixes à partir d'une voix donnée, fondée sur une séquence de variations rythmiques irrégulières d'une cellule (Regard XIV – 3 voix)

- Sur la même séquence rythmique, imitation par augmentation 3/2 (ou « ajout du point »). La voix « donnée » est construite harmoniquement sur le mode $M_6^3=2_0\cup 6_1$ (voir formalisation des modes) à densité 4 constante, et son imitation sur le mode $M_4^4=3_2\cup 6_3\cup 6_4$ à densité 4 constante. Ils servent de décor au « thème de Dieu » exposé dans le Regard I, construit d'abord en mode $M_2^1=3_0\cup 3_1$ puis en $M_2^2=3_1\cup 3_2$

comme $M_6^3=6_0\cup 6_1\cup 6_2\cup 6_4$

$M_4^4=6_2\cup 6_3\cup 6_4\cup 6_5$

$M_2^1=6_0\cup 6_1\cup 6_3\cup 6_4$

$M_2^2=6_1\cup 6_2\cup 6_4\cup 6_5$

on obtient facilement leurs intersections :

$M_6^3\cap M_4^4=6_2\cup 6_4$

$M_2^1\cap M_6^3=6_0\cup 6_1\cup 6_4$ $M_2^2\cap M_6^3=6_1\cup 6_2\cup 6_4$

$M_2^1\cap M_4^4=6_3\cup 6_4$ $M_2^2\cap M_4^4=6_2\cup 6_4\cup 6_5$

$M_2^1\cap M_6^3\cap M_4^4=6_4$ $M_2^2\cap M_6^3\cap M_4^4=6_2\cup 6_4$

Les accords employés dans la voix directrice et son imitation ne sont pas en relation directe avec le canon rythmique : il existe cependant une liaison dans la mesure où pour chaque voix, le cycle des accords correspond au cycle des 17 durées de base, avec une boucle interne supplémentaire.

En effet, il y a 10 accords de base dans la voix directrice :

$m_1 m_2 m_3 m_4 m_5 m_6 m_7 m_8 m_9 m_{10}$

ainsi répartis :

$\underline{m_1 m_2 m_3 m_4 m_5 m_6}\ \underline{m_1 m_2 m_3 m_4 m_5 m_6}\ \underline{m_7 m_6}\ \underline{m_8 m_9 m_{10}}$

et 9 accords de base dans l'imitation :

$P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6 P_7 P_8 P_9$

ainsi répartis

$\underline{P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6}\ \underline{P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6}\ \underline{P_7 P_1 P_2}\ \underline{P_8 P_9}$

chacune des 3 présentations du canon sont identiques, mais initialisées différemment (7ème croche, 3ème croche, 1ère croche) par rapport au thème qu'elles surplombent.

Enfin algorithmes élémentaires de décroissance puis de croissance de durées sur accord fixe ($d_i = d_{i-1} - 1, d_i = d_{i-1} + 1$ entre 1 et 16 x) au début et à la fin du Regard XVI (page 122 partition), et de décroissance de durées sur translation chromatique ascendante d'accord, superposée à une croissance symétrique sur translation chromatique descendante du même accord au début du Regard XVIII (page 138 partition), avec rétrogradation exacte de l'ensemble à la fin de la même pièce.

Algorithmes d'actualisation de profils

On a précisé dans le chapitre I la notion de profil, en hauteurs comme en durées. Comment appliquer ces profils dans le cours du langage à des échelles prédéterminées ?

J'en donnerai un exemple tiré de *Transe Calme* pour piano (Riotte 1974). Soit une organisation fondée sur la rencontre de 3 « voix » C_1, C_2 , C_3 associées à une monodie principale.

A chacune de ces voix est attachée une échelle spécifique ; les relations entre ces échelles seront exposées dans un autre chapitre. Il suffit de noter pour l'instant qu'elles sont constituées respectivement de n_1, n_2 et n_3 sons.On choisit un nombre N premier avec n_1, n_2 et n_3 qui correspondra à un prélèvement de N sons successifs dans chaque échelle.

Les sons étant successifs, chaque prélèvement sera entièrement déterminé par le choix du son le plus bas (ou le plus haut) de ce prélèvement.

L'algorithme de lecture de ces prélèvements par blocs pourra se définir par exemple par une alternance de glissements d'un son vers le haut et vers le bas.

Le principe du mécanisme et la séquence des sons-limites correspondants pour la voix C_3 correspond à un resserrement progressif de l'ambitus, d'où une indication du contrôle possible des zones parcourues par un choix judicieux des algorithmes.

Chaque prélèvement, correspondant dans l'exemple à un ensemble de 17 sons, est scindé en 4 groupes de sons (3, 6, 4, 4) à partir du son le plus grave, chaque groupe étant affecté d'une organisation particulière à prédominance monodique, rythmique et harmonique (m, r, h). Soient g_1 ,

g_2 , g_3 , g_4 ces groupes de sons. Ils seront présentés en séquence dans l'ordre g_3 , g_2 , (g_1+g_4) avec les fonctions respectives m, r et h.

On donnera l'exemple d'organisation de la fonction m, qui introduit la notion nouvelle de prélèvement cyclique dans un noyau.

On appelle noyau une séquence de N événements abstraits mémorisés constituant une boucle infinie (c'est-à-dire que le noyau constitué est modulo-N), auquel on fera appel partiellement pour une actualisation effective.

Chaque événement abstrait du noyau pourra être un k-uple, c'est-à-dire un complexe formé par une situation relative de hauteur, de durée, d'articulation et de dynamique.

Si l'on opère des prélèvements successifs dans ce noyau, on obtiendra des événements distincts et pourtant issus d'une organisation unique prédéterminée.

En effet, soit le noyau N ($e_1, e_2, \dots e_n$) e_i événement i

et le prélèvement $N(e_i\,;k)$ e_i 1er terme du prélèvement, k nombre de termes du prélèvement

Il suffira d'appliquer par exemple un algorithme tel que

$$e_i \rightarrow e_{i-1}$$

pour obtenir n actualisations distinctes possibles de k termes. On souligne la généralité d'un tel concept de prélèvement dans un noyau ; en effet toutes les figures obtenues ne préjugent pas des sons sur lesquels elles sont applicables ; ceux-ci dépendent de l'échelle choisie.